極限、微積分重點整理

LaTeX 排版實驗報告

劉桂廷

June 2022

Contents

1 數列的極限

1.1 無窮數列的極限

如果一個數列的項數是有限的，就稱這個數列為有限數列，否則稱為無窮數列。

1.1.1 無窮數列的極限

設 $\langle a_n \rangle$ 為一無窮數列

1. 當 n 趨向無限大且 a_n 趨近一個定值 a 時，稱無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 a，記作 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，並稱此數列為收斂數列。
2. 當 n 趨向無限大且 a_n 不會趨近一個定值時，稱無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列。

1.1.2 無窮數列的收斂與發散

設 $\langle r^n \rangle$ 為一無窮數列

1. 當 $-1 < r < 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$。
2. 當 $r = 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$。
3. 當 $r \leq -1$ 或 $r > 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為發散數列，其極限不存在。

1.1.3 歐拉數

歐拉數，它是一個無理數。

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.718281828459045...$$

1.2 數列極限的運算性值

若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 的極限分別為 a 與 b，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$， $\lim_{n\to\infty} b_n = b$，則

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$。
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$。
3. $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=ca$（其中 c 為常數）。
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$
5. 當所有 $b_n\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$。

1.3 求和符號與其運算性質

符號 $\sum$ 表示連加或求和的意思。利用這個符號可將級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 簡化成 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

1.3.1 運算性質

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$。
2. $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

1.4 無窮等比級數與循環小數

將無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 的各項用「+」號連結起來所成的式子 $a_1+a_2+a_3+\ldots$ 稱為無窮級數。

1.4.1 無窮級數的和

給定無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\ldots$，並令其前 n 項的和為 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

1. 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為收斂數列，且其極限為 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，則稱此無窮級數為收斂級數，他們的和為 S，即

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

2. 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為發散數列，則稱此無窮級數為發散級數，其和不存在。

將無窮等比數列的各項用加號連起來的算式，稱為無窮等比級數。

1.4.2 無窮等比級數的和

設 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ 為一無窮等比級數

1. 當 $-1 < r < 1$ 時，此無窮級數為收斂級數，其和為 $\dfrac{a}{1-r}$。
2. 當 $r \leq -1$ 或 $r \geq 1$ 時，此無窮級數為發散級數，其和不存在。

1.5 夾擠定理

給定一個數列 $\langle c_n \rangle$，若存在兩個數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 滿足：從某一項起（即 $n \geq n_0$），$a_n \leq c_n \leq b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，則數列 $\langle c_n \rangle$ 是收斂數列，並且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$。

2 微分

2.1 導數

2.1.1 導數的概念

2.1.1.1 變化率

給定一個函數 $f(x)$ 及其定義域中一點 x_0，則 $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 稱為 $f(x)$ 對於 x 的變化率。

2.1.1.2 導數的定義

給定一個函數 $f(x)$ 及其定義域中一點 x_0，若變化率的極限值 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，則稱此極限值為函數 $f(x)$ 在 x_0 處的導數，記為 $f'(x_0)$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。（$f'(x_0)$ 亦可寫成 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$）

2.1.2 導數的意義

2.1.2.1 切線的斜率

以 $y=f(x)$ 圖形上一點 $\mathrm{P}(x_0,f(x_0))$ 為切線之斜率為

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.1.2.2 瞬時速度

設 $f(x)$ 為某運動質點的位移函數，則此質點在 $x=x_0$ 的瞬時速度為

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.1.2.3 瞬時加速度

設 $f(x)$ 為某運動質點的速度函數，則此質點在 $x=x_0$ 的瞬時加速度為

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.1.3 導函數

2.1.3.1 導函數的定義

設 x 為函數 $f(x)$ 定義域的動點，若 $f'(x)$ 都存在，則 $f'(x)$ 稱為 $f(x)$ 的導函數。

- $f'(x)$ 亦可寫成 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$。
- $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}=\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

2.1.3.2 第 n 階導函數

- 第 1 階導函數 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$。
- 第 2 階導函數 $f''(x) = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d}{dx}f(x)) = \dfrac{d^2}{dx^2}$。
- 第 3 階導函數 $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}(f''(x)) = \dfrac{d^3}{dx^3}$。

……。

2.1.3.3 可微分函數

1. 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處的導數存在，則稱 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處可微分。
2. 若函數 $f(x)$ 在其定義域的每一點都可微分，則稱 $f(x)$ 是一個可微分的函數。
3. 求 $f'(x)$ 的過程，我們稱之為將 $f(x)$ 微分。亦即，「將 $f(x)$ 微分」，就是求「$f'(x)$」。

2.2 微分公式與性質

2.2.1 基本函數的微分

1. 設 $n \in \mathbb{N}$，則 $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$。
2. 設 c 是一個常數，則 $\dfrac{d}{dx}c = 0$
3. 設 $n \in \mathbb{N}$，則 $\dfrac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$。

   事實上，設 $r \in \mathbb{Q}$，則 $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$。

2.2.2 可微分函數的四則運算

設 $f(x)$，$g(x)$ 都是可微分函數，c 為常數，則

1. $\dfrac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \dfrac{d}{dx}f(x) + \dfrac{d}{dx}g(x)$。

2. $\dfrac{d}{dx}(cf(x)) = c \cdot \dfrac{d}{dx}f(x)$。
3. $\dfrac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \dfrac{d}{dx}f(x) - \dfrac{d}{dx}g(x)$。
4. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \dfrac{d}{dx}f(x)g(x) + f(x)[\dfrac{d}{dx}g(x)]$。
5. 當 $g(x) \neq 0$ 時，$\dfrac{d}{dx}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{[\frac{d}{dx}f(x)]g(x) - f(x)[\frac{d}{dx}g(x)]}{[g(x)]^2}$

2.2.3 連鎖律

2.2.3.1 連鎖律

設 $f(x)$，$g(x)$ 都是可微分函數，則

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(y)\bigg|_{y=f(x)} \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

，亦即 $\dfrac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$，亦即若 $z = g(y)$，$y = f(x)$，則 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$。

2.2.3.2 隱函數的微分法

對於 x 與 y 的關係式 $f(x,y) = 0$ 中，將 y 視為 x 的函數，稱為隱函數。在 $f(x,y) = 0$ 中，兩邊對 x 微分，其中含有 y 的預設為 $g(y)$，需利用連鎖律 $\dfrac{d}{dx}g(y) = g'(y)\dfrac{dy}{dx}$ 求，最後整理得出 $\dfrac{dy}{dx}$。

2.2.4 羅畢達公式 (L'Hospital rules)

設 $f(x)$，$g(x)$ 均為可微分函數，且 a 為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 定義域中的共同點，滿足 $f(a) = 0$，$g(a) = 0$，則 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

2.3 導數的應用

2.3.1 導數與單調性

設函數 $f(x)$ 在開區間 (a,b) 內每一點都可微分。

1. 若函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 內每一點的導數都是正數，則在開區間 (a, b) 上，$f(x)$ 是遞增函數
2. 若函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 內每一點的導數都是負數，則在開區間 (a, b) 上，$f(x)$ 是遞減函數

2.3.2 導數與凹向

2.3.2.1

設函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 內每一點的第二階導數都存在。

1. 若函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 內每一點的第二階導數都是正數，則在開區間 (a, b) 內每一點處，$f(x)$ 的圖形都是凹向上。
2. 若函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 內每一點的第二階導數都是負數，則在開區間 (a, b) 內每一點處，$f(x)$ 的圖形都是凹向下。

2.3.2.2 反曲點

在 $x = x_0$ 附近，若 $x < x_0$ 時 $f(x)$ 的凹向與 $x > x_0$ 時的凹向相反，則 $(x_0, f(x_0))$ 稱為函數 $f(x)$ 的一個反曲點。

2.3.3 導數與極值

2.3.3.1 一階導數檢定

設 $f(x)$ 在 x_0 點的附近各點都可微分，$f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0)$ 存在。

1. 若 $f''(x_0) < 0$，則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處有極大值。
2. 若 $f''(x_0) > 0$，則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處有極小值。

3 積分

3.1 黎曼和與面積及定積分

設 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數，將區間 $[a,b]$ 平分成 n 個小空間，其中 $x=x_0$，$x_n=b$，$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$，$t_i$ 為區間 $[x_{i-1},x_i]$ 上的任一點，M_i 為 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的最大值，m_i 為 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 的最小值，$1\leq i\leq n$。

3.1.1 黎曼和、上和與下和

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 稱為 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上的一個黎曼和。
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$ 稱為 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上的上和。
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x$ 稱為 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上的下和。

3.1.2 黎曼和與面積

若 $f(x)\geq 0$，$x\in[a,b]$，則函數 $f(x)$ 的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸所圍成的區域面積等於

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

3.1.3 定積分的定義

黎曼和的極限值 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ 稱為函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的定積分，以符號 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 表示，即 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$，此時稱 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上可積分。

3.1.4 定積分的性質

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是定義在閉區間 $[a,b]$ 上的可積分函數，k 為常數，則

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$。
2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$。
3. 當 $a<c<b$，$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$。
4. 規定：$\int_a^a f(x)\,dx = 0$，$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$。

3.2 反導函數與微積分基本定理

3.2.1 反導函數

3.2.1.1 反導函數的定義

若 $F'(x)=f(x)$，則稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數。

3.2.1.2 不定積分

若 $F'(x)=G'(x)$，則 $F(x)$ 與 $G(x)$ 只相差一個常數 c，即 $G(x)=F(x)+c$，可積分函數 $f(x)$ 的所有反導函數記為 $\int f(x)\,dx$，稱為 $f(x)$ 的不定積分。

3.2.1.3

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$$

其中，n 為正整數或 0，c 為常數。

3.2.2 微積分基本定理

設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且 $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$，$a\le x\le b$，則 $F(x)$ 為可微分函數，且 $F'(x)=f(x)$。

設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一個反導函數，則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

3.3 定積分的應用

3.3.1 曲線間的面積

3.3.1.1 曲線與水平線間的面積

設 $f(x)$ 為定義於閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數：

1. 若 $f(x) \geq 0$，$x \in [a,b]$，則由 $f(x)$ 的圖形，與直線 $x=a$，$x=b$ 及 x 軸圍成的區域面積為
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
2. 若 $f(x) \geq c$，c 為常數，則由 $f(x)$ 的圖形，與直線 $x=a$，$x=b$ 及 $y=c$ 軸圍成的區域面積為
$$\int_a^b (f(x)-c)\,dx$$

3.3.1.2 曲線與曲線間的面積

設 $f(x)$，$g(x)$ 均為定義於閉區間 $[a,b]$ 的連續函數。

1. 若 $f(x) \geq g(x)$，$x \in [a,b]$，則 $f(x)$ 的圖形、$g(x)$ 的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 圍成的區域面積為
$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$
2. 當 $a \leq x \leq c$ 時，$f(x) \geq g(x)$；當 $c \leq x \leq b$ 時，$f(x) \leq g(x)$，則 $y=f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形，以及直線 $x=a$，$x=b$ 圍成的區域面積為

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^c (f(x)-g(x))\,dx - \int_c^b (f(x)-g(x))\,dx$$

3.3.2 旋轉體的體積

3.3.2.1 x 軸上方的區域繞 x 軸的旋轉體

設 $f(x)$ 為定積分在區間 $[a,b]$ 上的函數，且 $f(x) \geq 0$。則 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $x = a$，$x = b$ 及 x 軸圍成的區域繞 x 軸旋轉體的體積為

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx$$

3.3.2.2 兩曲線間的區域繞 x 軸的旋轉體

設 $f(x)$，$g(x)$ 均為定義於 $[a,b]$ 上的函數，且 $f(x) \geq g(x) \geq 0$，則由 $f(x)$，g(x) 的圖形與直線 $x = a$，$x = b$ 所圍成的區域繞 x 軸旋轉體的體積為

$$\int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx$$

3.3.3 物理學上的位移與功

3.3.3.1 定積分求位移

設運動質點在直線上移動，在時刻 x 秒的速度函數為 $V(x)$（公尺／秒），則此運動質點從時刻 $x = a$ 秒到時刻 $x = b$ 秒的位移為

$$\int_a^b V(x) \, dx$$

3.3.3.2 定積分求功

設運動質點受水平方向的力在 x 軸上移動，若在位置 x 時所受的力為 $f(x)$，則此質點由 $x = a$ 移動到 $x = b$ 所作的功

$$\int_a^b f(x) \, dx$$